Problemas resueltos

1. Hallar y', en la ecuación $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$.

$$\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2) - x\frac{d}{dx}(y^2) - y^2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0 \qquad \text{e} \qquad y' = \frac{y^2 - 2x - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}$$

2. Hallar y' e y'', en la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$.

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x - xy' - y + 2yy'. = 0 \qquad \text{e} \qquad y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

$$y'' = \frac{(x-2y)\frac{d}{dx}(2x-y) - (2x-y)\frac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2} = \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{3xy' - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{3x\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right) - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x-2y)^3} = \frac{18}{(x-2y)^3}$$

3. Hallar y' e y'', en la ecuación $x^3y + xy^3 = 2$ para $x = 1$.

$$x^3y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

y

$$x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0$$

Cuando $x = 1$, $y = 1$; sustituyendo en la primera ecuación, $y' = -1$.

Sustituyendo $x = 1$, $y = 1$, $y' = -1$ en la segunda ecuación, $y'' = 0$.

Problemas propuestos

4. Deducir la Fórmula 10, Capítulo 5, para $m = p/q$, siendo p y q números enteros, escribiendo $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q = x^p$ y derivando con respecto a x.

5. Hallar y'', en las ecuaciones (*a*) $x + xy + y = 2$, (*b*) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$. *Sol.* $y'' = \dfrac{2(1+y)}{(1+x)^2}$, (*b*) $y'' = -\dfrac{4xy}{(y^2-x)^3}$

6. Hallar y', y'', e y''' en (*a*) el punto (2, 1) de $x^2 - y^2 - x = 1$, (*b*) el punto (1, 1) de $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$. *Sol.* (*a*) 3/2, —5/4, 45/8; (*b*) 1, 0, 0

7. Hallar la pendiente de la tangente en el punto (x_0, y_0) de (*a*) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (*b*) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, (*c*) $x^3 + y^3 - 6x^2y = 0$. *Sol.* (*a*) $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (*b*) $\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (*c*) $\dfrac{4x_0y_0 - x_0^2}{y_0^2 - 2x_0^2}$

8. Demostrar que las curvas $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ y $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ se cortan en ángulo recto en el origen.

9. (*a*) El área total de un paralelepípedo recto cuya base es un cuadrado de lado y de altura x viene dada por $S = 2y^2 + 4xy$. Suponiendo que S es constante, calcular dy/dx sin despejar y.

(*b*) El área total de un cilindro recto circular de radio r y altura h viene dada por $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Suponiendo que S es constante, calcular dr/dh. *Sol.* (*a*) $-\dfrac{y}{x+y}$; (*b*) $-\dfrac{r}{2r+h}$

10. En la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, demostrar que $\left|\dfrac{y''}{\{1 + (y')^2\}^{3/2}}\right| = \dfrac{1}{r}$.

11. Siendo $S = \pi x(x + 2y)$ y $V = \pi x^2y$, demostrar que $dS/dx = 2\pi(x - y)$ cuando V es constante, y que $dV/dx = -\pi x(x-y)$ cuando S es constante.